UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Ciências Naturais

1 Gráficos

1.1 Introdução

Um gráfico é uma curva que mostra a relação entre duas variáveis medidas. Quando, em um fenômeno físico, duas grandezas estão relacionadas entre si o gráfico dá uma idéia clara de como a variação de uma das quantidades afeta a outra.

Assim, um gráfico bem feito pode ser a melhor forma de apresentar os dados experimentais. Ao realizarmos uma medida sugere-se colocar num gráfico todos os pontos experimentais e traçar curvas que se ajustem o mais aproximadamente possível a esses pontos. A forma dessas curvas pode auxiliar o experimentador a verificar a existência de leis físicas ou leva-lo a sugerir outras leis não previamente conhecidas.

Muitas vezes nos defrontaremos com o problema de encontrar uma função que descreva apropriadamente a dependência entre duas grandezas medidas no laboratório. Algumas das curvas mais comuns são: a reta, parábolas, exponenciais, senóides, etc.

1.2 Construção de Gráficos

Há algumas regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos:

1. Colocar um título, especificando o fenômeno físico em estudo, que relaciona as grandezas medidas;
2. Escrever nos eixos coordenados as grandezas representadas, com suas respectivas unidades. A escala deve conter a informação do número de algarismos significativos das medidas. No eixo horizontal (abscissa) é lançada a *variável independente*, isto é, a variável cujos valores são escolhidos pelo experimentador, e no eixo vertical é lançada a *variável dependente*, ou seja, aquela obtida em função da primeira;

3. Em geral, a relação de aspecto (altura/largura) deve ser menor do que 1, pois o gráfico será de mais fácil leitura (por esta razão é que a tela de cinema e a da televisão tem relação de aspecto menor do que 1);
4. Se possível cada eixo deve começar em zero;
5. Escolher escalas convenientes tais que facilitem tanto a construção quanto a leitura dos gráficos. A escala deve ser simples e sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos de números inteiros;
6. A escala adotada num eixo não precisa ser igual à do outro;
7. Escolher escalas tais que a curva cubra aproximadamente toda a folha disponível do papel do gráfico;
8. Deve-se ter o cuidado de nunca assinalar na escala as coordenadas dos dados experimentais;
9. Marque cada um dos pontos do gráfico, cuidadosamente e claramente, escolhendo para isto um símbolo adequado e de tamanho facilmente visível (por exemplo, um círculo ou um quadradinho) com um pontinho no centro. Nunca marque os pontos apenas com um pontinho do lápis;
10. Marque claramente as barras de erro em cada ponto. Se o erro for muito pequeno para aparecer na escala escolhida anote ao lado: as barras de erro são muito pequenas para aparecer na figura;

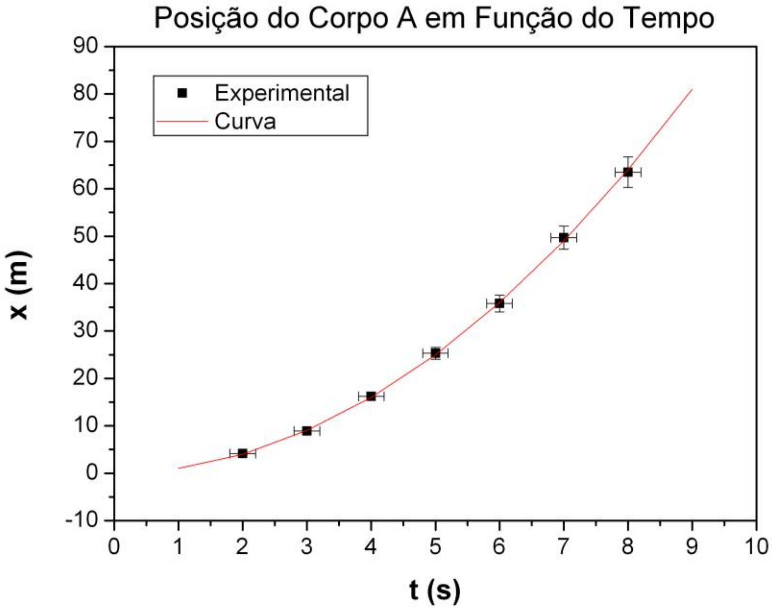


Figura 7 – Gráfico mostrando os dados experimentais e a curva traçada.

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados no gráfico, resta traçar a curva. Esta não precisa passar sobre todos os pontos; de fato, é possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico. Sendo assim, não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental. A figura 7 mostra um exemplo de dados experimentais cuja dependência é caracterizada por uma parábola. Os quadrados (▪) representam os dados experimentais e sua dispersão é devida aos erros cometidos durante a experiência. A linha contínua representa a curva que melhor descreve a dependência quadrática da grandeza x com a grandeza y.

1.3 Gráficos e Equações Lineares

A seguir trataremos apenas de grandezas físicas (x e y) relacionadas por uma dependência linear, ou seja, por uma função y=f(x), onde f(x) obedece a equação de uma reta: y=ax+b, com a e b constantes, onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear.

O coeficiente angular corresponde à inclinação da reta, ou seja, $a = \Delta y / \Delta x$, enquanto que o coeficiente linear b é obtido pela interseção da reta com o eixo y, como indica a figura 8.

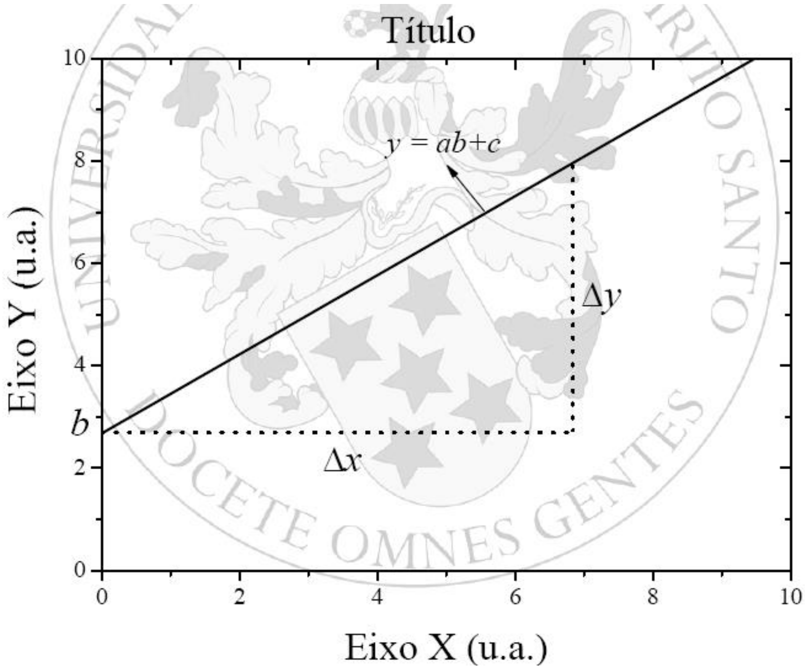


Figura 8 – Determinação dos coeficientes a e b da curva y.

Alguns exemplos típicos são:

1. **Movimento retilíneo uniforme (MRU):**

Neste caso têm-se duas grandezas físicas (posição x e tempo t) relacionadas pela função linear:

$$x = v_0 t + x_0 \quad , \tag{5.1}$$

onde v_0 é a velocidade do corpo (constante) e x_0 sua posição inicial. Portanto, lançando num gráfico os pontos medidos de t (no eixo x) e x (no eixo y), conforme a figura 9, teremos o coeficiente angular correspondente a v_0 e o coeficiente linear a x_0.

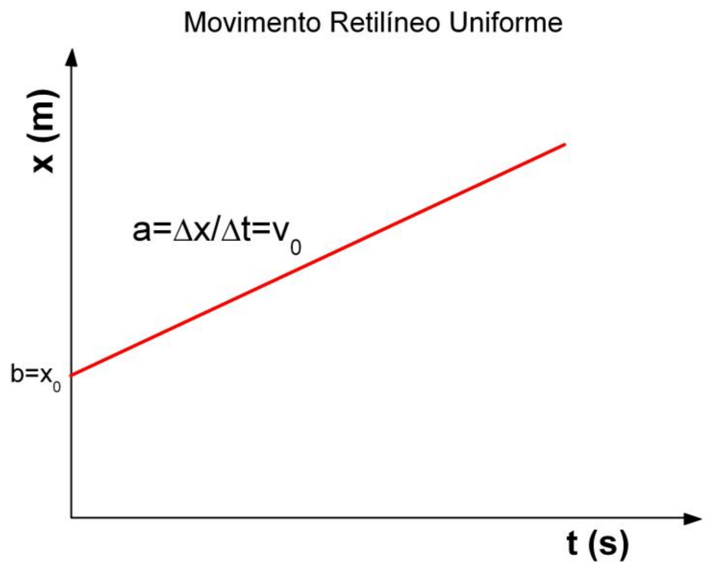


Figura 9 – Exemplo de gráfico do movimento retilíneo uniforme.

2. Movimento retilíneo uniformemente acelerado (MRUA):

Neste tipo de movimento temos duas grandezas físicas: tempo t e velocidade v de um corpo sujeito a uma aceleração constante a, descrito pela função:

$$v = at + v_0 \tag{5.2}$$

Neste caso, a construção de uma reta com eixo x correspondendo ao tempo t e a velocidade v ao eixo y, implicará que os coeficientes angular e linear fornecerão os valores da aceleração a e da velocidade inicial v_0 do movimento, respectivamente.

A seguir, descreveremos dois métodos que nos permitem determinar estes coeficientes a partir dos dados experimentais.

1.4 Métodos de Determinação dos Coeficientes *a* e *b*

Conforme já foi mencionado, será comum em laboratório nos defrontarmos com medidas de grandezas correlacionadas com as quais não temos uma relação estabelecida. Nestes casos quase sempre a primeira atitude é buscar através de gráficos uma lei simples ligando uma grandeza à outra. Aqui apresentaremos dois métodos para determinar esta relação no caso de uma dependência linear, a partir de dados experimentais.

5.4.1) Método Gráfico

Este método permite estimar os parâmetros de uma reta e é recomendado quando não se dispõe de calculadora ou computador para realização de cálculos. As únicas ferramentas necessárias são: um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

Para ilustrar o método, consideremos os dados representados na figura 10.

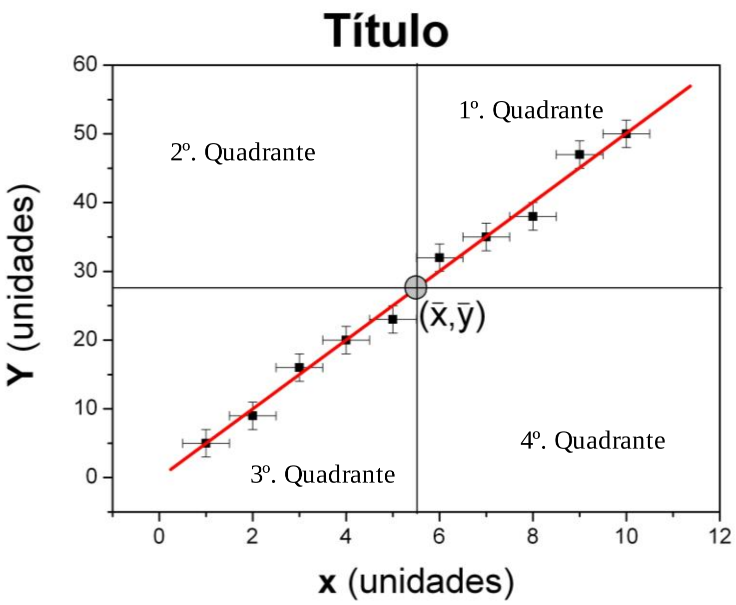


Figura 10 – Pontos experimentais e reta média.

Siga os passos abaixo.

1. Estime o centro de gravidade dos pontos $(\bar{x},\bar{y})$, onde $\bar{x}=(x_{\min}+x_{\max})/2$ e $\bar{y}=(y_{\min}+y_{\max})/2$. Os índices *min* e *max* referem-se aos valores mínimos e máximos de x e y medidos. As retas, vertical e horizontal, que passam por este ponto divide o gráfico em quatro quadrantes. No exemplo da figura 10, os dados estão metade no quadrante 1 e metade no quadrante 3.

2. Coloque a ponta do lápis no ponto $(\bar{x},\bar{y})$ e apoie a régua no lápis.

3. Gire a régua em torno do ponto $(\bar{x},\bar{y})$ até que 50% dos pontos **de cada quadrante** estejam por cima, e 50% abaixo da régua. (Note que mais de uma reta satisfazem esta condição e você deve escolher uma média.) Trace a **reta média**. A reta não necessariamente precisa passar por todos os pontos e nem pelos pontos iniciais e finais. A equação desta reta será:

$$y = mx + b. \tag{5.3}$$

5.4.1.1) Coeficiente Angular (m) e Linear (b) da Reta Média

Para avaliar o coeficiente angular da reta média escolha dois pontos sobre a reta, como sugerido na figura 11 (pontos P e Q).

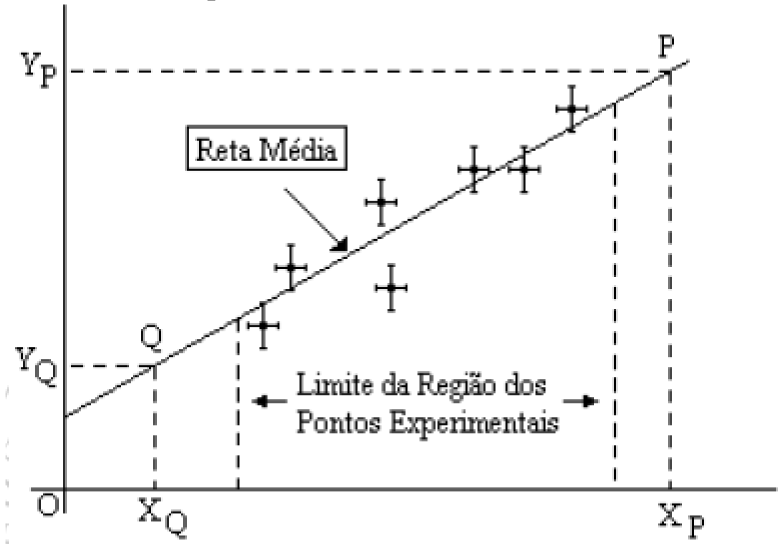


Figura 11 – Determinação do coeficiente angular da reta média.

Os pontos P e Q não são pontos experimentais e devem ser escolhidos em uma posição fora da região delimitada pelos dados experimentais. O coeficiente angular da reta será dado por:

$$m = \frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q} \quad (5.4)$$

O coeficiente linear (b), por sua vez, permanece, sendo, simplesmente, o ponto em que a reta toca o eixo y.

5.4.1.2) Incertezas dos coeficientes das retas médias

Para estimar a incerteza no coeficiente angular da reta média, considere as duas diagonais do quadrilátero ABCD como mostra a figura 12. Para obter os segmentos de reta AB e CD proceda da seguinte forma. Assinale em cada janela de incerteza, o vértice mais distante da reta média. Esse procedimento vai gerar um conjunto de pontos acima e abaixo da reta média. O conjunto de pontos que ficou acima permite traçar uma reta média auxiliar e determinar o segmento AB pela interseção desta reta com as verticais que passam por X_i e X_f. O segmento CD é obtido de forma análoga.

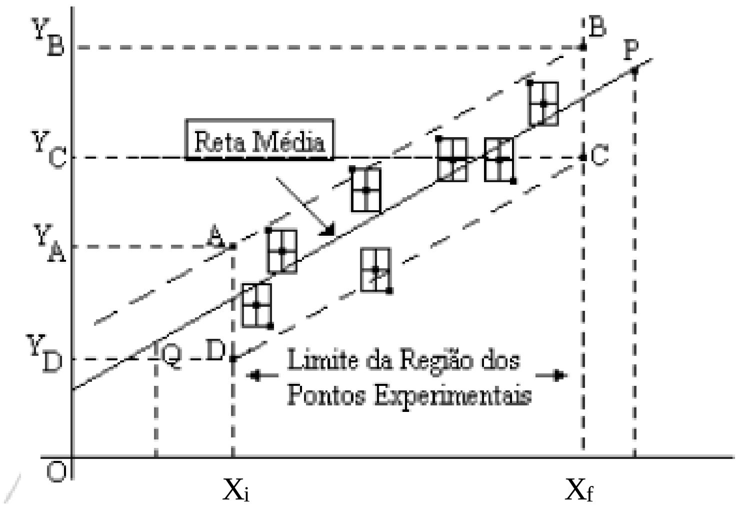


Figura 12 – Procedimento gráfico para obtenção dos coeficientes da reta média.

Então é possível calcular $\pm m$ e $\pm b$, a partir das duas diagonais do quadrilátero ABCD:

$$\pm \Delta m = \pm \frac{(m_{max} - m_{min})}{2} \text{ e}$$
$$\pm \Delta b = \pm \frac{(b_{max} - b_{min})}{2} \qquad (5.5)$$

onde $m_{max}=(Y_B - Y_D)/(X_f - X_i)$ e $m_{minx}=(Y_C - Y_A)/(X_f - X_i)$. b_{max} e b_{min} são as extrapolações das duas diagonais até o eixo y.

5.4.2) Método dos Mínimos Quadrados

O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador.

Este método consiste em minimizar o erro quadrático médio (S) das medidas. Considere então um conjunto de N medidas (x_i, y_i), com i assumindo valores inteiros desde 1 até N. S é definido como:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} (y - y_i)^2 \quad , \tag{5.6}$$

onde y é o valor da curva ajustada (y=ax+b). O objetivo é somar os ΔS_i das N medidas e traçar uma reta que torne a soma dos ΔS_i mínima. Matematicamente isso corresponde a $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. É razoável acreditar que para que isso aconteça a reta desejada deve passar entre todos os pontos experimentais. Destas duas expressões extraímos os valores dos parâmetros a e b. O resultado é:

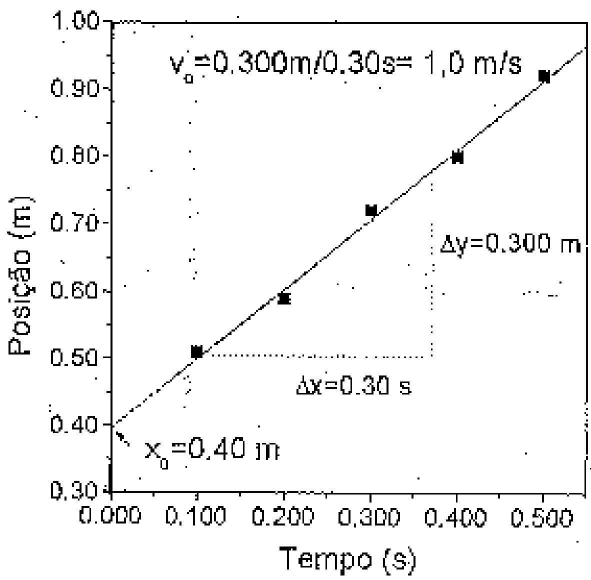
$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2} \quad ,$$

Onde usou-se a notação de somatório: $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_N$.

5.5) Exemplo de Determinação dos Coeficientes Angular e Linear

Considere uma medida de movimento retilíneo uniforme efetuado por um carrinho no laboratório. Foram medidos tanto sua posição x (em metros) quanto o tempo t (em segundos) e os resultados estão conforme a tabela abaixo. Construa o gráfico que representa o movimento e determine a velocidade e a posição inicial do carrinho usando o método dos mínimos quadrados e o método gráfico.

X tempo (s)	Y posição (m)
0.100	0.51
0.200	0.59
0.300	0.72
0.400	0.80
0.500	0.92



Para usarmos o método dos mínimos quadrados, sugere-se a construção de uma tabela, conforme indicado abaixo, lembrando qu aqui o eixo x corresponde ao tempo t e o eixo y, à posição x:

x(s)	y(m)	xy	x^2
0,100	0,51	0,051	0,0100
0,200	0,59	0,12	0,0400
0,300	0,72	0,22	0,0900
0,400	0,80	0,32	0,160
0,500	0,92	0,46	0,250
$\Sigma x = 1{,}500$	$\Sigma y = 3{,}54$	$\Sigma xy=1{,}17$	$\Sigma x^2 = 0{,}550$

Com esses resultados, basta substituir os valores na fórmulas para a e b e lembrar que neste caso temos N=5 medidas:

$$a = (5x1,17 - 1,500x3,54)/[5x0,550 - (1,500)^2] = [2,75 - 2,250] = 0,54/0,50 = 1,08m/s = 1,1m/s$$
$$b = (0,550x3,54 - 1,17x1,500)/[5x0,550 - (1,500)^2] = (1,95 - 1,75)/[2,75 - 2,250] = 0,20/0,50 = 0,40m$$

Portanto, temos v_0 =1,1m/s e x_0 =0,40m.

Para construir a curva, basta atribuir pelo menos dois valores para t e encontrar os correspondentes x. Verifica-se que $\bar{x}$ =0,30s e $\bar{y}$ =0,71m. Com este centro de gravidade determina-se conforme a figura anterior os valores v_0 =1,0m/s e x_0 =0,40m. Observe a concordância dos dois métodos.

5.6) Exercícios

1) Considere a tabela abaixo. Ela apresenta as posições sucessivas de um certo objeto, em movimento retilíneo e uniforme.

Tempo(s) $\pm$ 0,0001	0,1400	0,2000	0,3200	0,4400	0,5200	0,6400
Posição (mm) $\pm$ 1	879	895	919	949	964	970

Marque os pontos em papel milimetrada, trace a reta média e obtenha a velocidade do objeto. A seguir desenhe as barras de incerteza e obtenha $v \pm \Delta v$ pelo método gráfico.

Obs: As barras de erro ou incerteza indicam a faixa de valores prováveis para a grandeza medida.

2) Estudando o movimento de um carrinho, efetuado ao longo de um trilho de ar (movimento retilíneo uniforme) obteve-se os seguintes dados experimentais, após:

Posição (mm)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)
879	0,1400	0,1500	0,1400	0,1200	0,1200
895	0,2000	0,2200	0,2400	0,2500	0,2000
919	0,3200	0,3300	0,2900	0,3400	0,3300
949	0,4400	0,4500	0,4600	0,4600	0,4500
964	0,5200	0,5200	0,5100	0,5300	0,5900
970	0,6400	0,7200	0,7000	0,6900	0,6000

Acima uma posição para o sensor de medida no trilho foi escolhida e então mediu-se o tempo gasto pelo carrinho para atingi-lo. Esta medida foi feita 5 vezes, correspondendo aos valores t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5. Em seguida repetiu-se o procedimento para outras 5 posições do sensor ao longo do trilho.

Determine utilizando o método dos mínimos quadrados a velocidade do carrinho e sua posição inicial com os erros associados.